**ТИПОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ**

## Непрерывно-детерминированные модели (D - схемы)

Непрерывно-детерминированные модели используются для анализа и проектирования динамических систем с непрерывным временем, процесс функционирования которых описывается детерминированными зависимостями. Данный класс систем может быть описан с помощью дифференциальных, интегральных, интегрально-дифференциальных и общих функциональных уравнений. Среди них важнейшее место занимают динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями, представляющими собою такие уравнения, в которых неизвестными выступают функции одной или нескольких переменных и их производные различных порядков.

Дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, в которых неизвестными будут функции одной переменной или нескольких переменных, причём в уравнение входят не только их функции но их производные различных порядков.

Математическое соотношение для детерминированных систем в общем виде:

 (7).

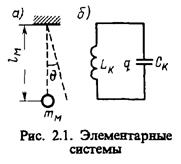
где  ,  и  — *n*-мерные векторы;  — вектор-функция, которая определена на некото­ром  -мерном  множестве и является непрерывной.

Так как математические схемы такого вида отражают динамику изучаемой системы, т. е. ее поведение во времени, то они называются *D-схемами*(англ. dynamic)

В простейшем случае обыкновенное дифференциальное уравне­ние имеет вид

 (2.8)

Для иллюстрации особенностей построения и применения *D-схем* рассмотрим простейший пример формализации процесса фун­кционирования двух элементарных систем различной физической природы: механической  (колебания маятника) и электрической  (колеба­тельный контур)*.*



Процесс малых колебаний маятника описывается обыкновенным дифференциальным уравнением:



где  ,  — масса и длина подвеса маят­ника; *g*— ускорение свободного падения;  — угол отклонения маятника в момент времени *t.*

Из этого уравнения свободного колебания маятника можно найти оценки интересующих характеристик. Например, период ко­лебания маятника



Аналогично, процессы в электрическом колебательном контуре описываются обыкновенным дифференциальным уравнением



где  ,  — индуктивность и емкость конденсатора; *q(t)* — заряд конденсатора в момент времени *t*.

Из этого уравнения можно получить различные оценки харак­теристик процесса в колебательном контуре. Например, период характеристических колебаний



Очевидно, что, введя обозначения  ,  ,  ,  , получим обыкновенное дифферен­циальное уравнение второго порядка, описывающее поведение этой замкнутой системы:

 (1)

где  ,  ,  —параметры системы; *z*(*t*)— состояние системы в момент времени *t*.

Таким образом, поведение этих двух объектов может быть исследовано на основе общей математической модели (1). Кроме того, необходимо отметить, что поведение одной из систем может быть проанализировано с помощью другой. Например, поведение маятника (системы  )может быть изучено с помощью электричес­кого колебательного контура (системы  )*.*

Если изучаемая система *S*, т. е. маятник или контур, взаимодействует с внешней средой *E*, то появляется входное воздействие *x*(*t*) (внешняя сила для маятника и источник энергии для контура) и непрерывно-детерминированная модель такой системы будет иметь вид



С точки зрения общей схемы математической модели *x*(*t*)является входным (управляющим) воздействием, а состояние системы *S*в данном случае можно рассматривать как выходную характеристику, т. е. полагать, что выходная переменная совпадает с состоянием системы в данный момент времени *y=z*.

## Дискретно – детерминированные модели (F-схемы)

ДДМ являются предметом рассмотрения теории автоматов (ТА). ТА - раздел теоретической кибернетики, изучающей устройства, перерабатывающие дискретную информацию и меняющего свои внутренние состояния лишь в допустимые моменты времени.

Конечный автомат имеет множество внутренних состояний и входных сигналов, являющихся конечными множествами. Автомат задаётся F- схемой: F=<z,x,y,,,z0>, (1)

где z,x,y - соответственно конечные множества входных, выходных сигналов (алфавитов) и конечное множество внутренних состояний (алфавита). z0Z - начальное состояние; (z,x) - функция переходов; (z,x) - функция выхода. Автомат функционирует в дискретном автоматном времени, моментами которого являются такты, каждому из которых соответствуют постоянные значения входного, выходного сигнала и внутреннего состояния. Абстрактный автомат имеет один входной и один выходной каналы.

В момент t, будучи в состоянии z(t), автомат способен воспринять сигнал x(t) и выдать сигнал y(t)=[z(t),x(t)], переходя в состояние z(t+1)=[z(t),z(t)], z(t)Z; y(t)Y; x(t)X.

Существуют F- автомат 1-ого рода (Миля), функционирующий по схеме:

z(t+1)= [z(t),x(t)], t=0,1,2… (1)

y(t)=[z(t),x(t)], t=0,1,2… (2)

1. автомат 2-ого рода:

z(t+1)= [z(t),x(t)], t=0,1,2… (3)

y(t)=[z(t),x(t-1)], t=1,2,3… (4)

Автомат 2-ого рода, для которого y(t)=[z(t)], t=0,1,2,… (5)

т.е. функция выходов не зависит от входной переменной x(t), называется автоматом Мура.

Т.о. уравнения 1-5 полностью задающие F- автомат, являются частным случаем уравнения:

 (6)

где - вектор состояния, - вектор независимых входных переменных, - вектор воздействий внешней среды, - вектор собственных внутренних параметров системы, - вектор начального состояния, t - время; и уравнение

, (7)

По числу состояний конечные автоматы бывают с памятью и без памяти. Автоматы с памятью имеют более одного состояния, а автоматы без памяти (комбинационные или логические схемы) обладают лишь одним состоянием. При этом согласно (2), работа комбинационной схемы заключается в том, что она ставит в соответствие каждому входному сигналу x(t) определённый выходной сигнал y(t), т.е. реализует логическую функцию вида:

y(t)=[x(t)], t=0,1,2,…

Эта функция называется булевой, если алфавиты X и Y, которым принадлежат значения сигналов x и y состоят из 2-х букв.

По характеру отсчёта времени (дискретному) F- автоматы делятся на синхронные и асинхронные. В синхронных автоматах моменты времени, в которые автомат "считывает" входные сигналы, определяются принудительно синхронизирующими сигналами. Реакция автомата на каждое значение входного сигнала заканчивается за один такт синхронизации. Асинхронный F- автомат считывает входной сигнал непрерывно и поэтому, реагируя на достаточно длинный вводный сигнал постоянной величины x, он может, как это следует из 1-5, несколько раз изменить своё состояние, выдавая соответствующее число выходных сигналов, пока не перейдёт в устойчивое.

Для задания F- автомата необходимо описать все элементы множества F=<z,x,y,,,z0>, т.е. входной, внутренний и выходной алфавиты, а также функции переходов и выходов. Для задания работы F- автоматов наиболее часто используются табличный, графический и матричный способ.

В табличном способе задания используется таблицы переходов и выходов, строки которых соответствуют входным сигналам автомата, а столбцы - его состояниям. При этом обычно 1-ый столбец слева соответствует начальному состоянию z­0. На пересечении i-ой строки и j-ого столбца таблицы переходов помещается соответствующее значение (zk,xi) функции переходов, а в таблице выходов - (zk, xi) функции выходов. Для F- автомата Мура обе таблицы можно совместить, получив т.н. отмеченную таблицу переходов, в которой над каждым состоянием zk автомата, обозначающим столбец таблицы, стоит соответствующий этому состоянию, согласно (5), выходной сигнал (zi).

Описание работы F- автомата Мили таблицами переходов и выходов иллюстрируется таблицей (1), а описание F- автомата Мура - таблицей переходов (2).

Таблица 1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| xj | zk | | | |
|  | z0 | z1 | … | zk |
| Переходы | | | | |
| x1 | (z0,x1) | (z1,x1) | … | (zk,x1) |
| x2 | (z0,x2) | (z1,x2) | … | (zk,x2) |
| …………………………………………… | | | | |
| Выходы | | | | |
| x1 | (z0,x1) | (z1,x1) | … | (zk,x1) |
| …………………………………………… | | | | |
| Xi | (z0,xi) | (z1,xi) | … | (zk,xi) |

Таблица 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | (zk) | | | |
| xi2 | (z0) | (z1) | … | (zk) |
|  | z0 | z1 | … | zk |
| x1 | (z0,x1) | (z1,x1) | … | (zk,x1) |
| x2 | (z0,x2) | (z1,x2) | … | (zk,x2) |
| ………………………………………………………… | | | | |
| Xi | (z0,xi) | (z1,xi) | … | (zk,xi) |

Примеры табличного способа задания F- автомата Мили F1 с тремя состояниями, двумя входными и двумя выходными сигналами приведены в таблице 3, а для F- автомата Мура F2 - в таблице 4.

Таблица 3

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| xj | Zk | | |
|  | z0 | z1 | z2 |
| Переходы | | | |
| x1 | z2 | z0 | z0 |
| x2 | z0 | z2 | z1 |
| Выходы | | | |
| x1 | y1 | y1 | y2 |
| x2 | y1 | y2 | y1 |

Таблица 4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | y | | | | |
| xi | y1 | y1 | y3 | y2 | y3 |
|  | z0 | z1 | z2 | z3 | z4 |
| x1 | z1 | z4 | z4 | z2 | z2 |
| x2 | z3 | z1 | z1 | z0 | z0 |

При другом способе задания конечного автомата используется понятие направленного графа. Граф автомата представляет собой набор вершин, соответствующих различным состояниям автомата и соединяющих вершин дуг графа, соответствующих тем или иным переходам автомата. Если входной сигнал xk вызывает переход из состояния zi в состояние zj, то на графе автомата дуга, соединяющая вершину zi  с вершиной zj обозначается xk. Для того, чтобы задать функцию переходов, дуги графа необходимо отметить соответствующими выходными сигналами. Для автоматов Мили эта разметка производиться так: если входной сигнал xk ­действует при состоянии zi, то согласно сказанному получается дуга, исходящая из zi­ и помеченная xk; эту дугу дополнительно отмечают выходным сигналом y=(zi, xk). Для автомата Мура аналогичная разметка графа такова: если входной сигнал xk, действуя при некотором состоянии автомата, вызывает переход в состояние zj, то дугу, направленную в zj и помеченную xk, дополнительно отмечают выходным сигналом y=(zj, xk). На рис. 1 приведены заданные ранее таблицами F- автоматы Мили F1 и Мура F2 соответственно.



Рис. 1. Графы автоматов Мили (а) и Мура (б).

При решении задач моделирования часто более удобной формой является матричное задание конечного автомата. При этом матрица соединений автомата есть квадратная матрица С=|| cij ||, строки которой соответствуют исходным состояниям, а столбцы - состояниям перехода. Элемент cij­­=xk/yS в случае автомата Мили соответствует входному сигналу xk, вызывающему переход из состояния zi в состояние zj и выходному сигналу yS, выдаваемому при этом переходе. Для автомата Мили F1, рассмотренного выше, матрица соединений имеет вид:



Если переход из состояния zi в состояние zj происходит под действием нескольких сигналов, элемент матрицы cij представляет собой множество пар "вход/выход" для этого перехода, соединённых знаком дизъюнкции.

Для F- автомата Мура элемент cij равен множеству входных сигналов на переходе (zizj), а выход описывается вектором выходов:



i-ая компонента которого выходной сигнал, отмечающий состояние zi

**Пример.** Для рассмотренного ранее автомата Мура F2 запишем матрицу состояний и вектор выходов:

 ; 

Для детерминированных автоматов переходы однозначны. Применительно к графическому способу задания F- автомата это означает, что в графе F- автомата из любой вершины не могут выходить 2 и более ребра, отмеченные одним и тем же входным сигналом. Аналогично этому в матрице соединений автомата С в каждой строке любой входной сигнал не должен встречаться более одного раза.

Рассмотрим вид таблицы переходов и графа асинхронного конечного автомата. Для F- автомата состояние zk называется устойчивым, если для любого входа xiX, для которого (zk,xi)=zk имеет место (zkxi)=yk. Т.о. F- автомат называется асинхронным, если каждое его состояние zkZ устойчиво.

На практике всегда автоматы являются асинхронными, а устойчивость их состояний обеспечивается тем или иным способом, например, введением сигналов синхронизации. На уровне абстрактной теории удобно часто оперировать с синхронными конечными автоматами.

Пример. Рассмотрим асинхронный F- автомат Мура, который описан в табл. 5 и приведён на рис. 2.

Таблица 5

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | y | | |
| xi | y1 | y2 | y3 |
|  | z0 | z1 | z2 |
| x1 | z1 | z1 | z1 |
| x2 | z2 | z1 | z2 |
| x3 | z0 | z0 | z2 |



Рис. 2.Граф асинхронного автомата Мура

Если в таблице переходов асинхронного автомата некоторое состояние zk стоит на пересечении строки xS и столбца zS(Sk), то это состояние zk обязательно должно встретиться в этой же строке в столбце zk.

С помощью F-схем описываются узлы и элементы ЭВМ, устройства контроля, регулирования и управления, системы временной и пространственной коммутации в технике обмена информацией. Широта применения F-схем не означает их универсальность. Этот подход непригоден для описания процессов принятия решений, процессов в динамических системах с наличием переходных процессов и стохастических элементов.

# Непрерывно-стохастические модели (Q - схемы)

К ним относятся системы массового обслуживания ( англ. queuing system), которые называют Q- схемами.

## Методы теории массового обслуживания.

Предмет ТМО — системы массового обслуживания (СМО) и сети массового обслуживания. Под СМО понимают динамическую систему, предназначенную для эффективного обслуживания случайного потока заявок при ограниченных ресурсах системы. Обобщённая структура СМО приведена на рисунке 3.1.



Рис. 3.1. Схема СМО.

Поступающие на вход СМО однородные заявки в зависимости от порождающей причины делятся на типы, интенсивность потока заявок типа i (i=1…M) обозначено i. Совокупность заявок всех типов - входящий поток СМО.

Обслуживание заявок выполняется **m** каналами. Различают ***универсальные и специализированные*** каналы обслуживания. Для универсального канала типа j считается известными функции распределения Fji() длительности обслуживания заявок произвольного типа. Для специализированных каналов функции распределения длительности обслуживания каналов заявок некоторых типов являются неопределёнными, назначение этих заявок на данный канал.

В качестве процесса обслуживания могут быть представлены различные по своей физической природе процессы функционирования экономических, производственных, технических и других систем, например, потоки поставок продукции некоторому предприятию, потоки деталей и комплектующих изделий на сборочном конвейере цеха, заявки на обработку информации ЭВМ от удалённых терминалов и т.д. При этом характерным для работы таких объектов является случайное поведение заявок (требований) на обслуживание и завершение обслуживания в случайные моменты времени.

Q - схемы можно исследовать аналитически и имитационными моделями. Последнее обеспечивает большую универсальность.

Рассмотрим понятие массового обслуживания.

В любом элементарном акте обслуживания можно выделить две основные составляющие: ожидание обслуживания заявкой и собственно обслуживание заявки. Это можно отобразить в виде некоторого i-ого прибора обслуживания Пi, состоящего из накопителя заявок, в котором может находится одновременно li=0…LiH заявок, где LiH - ёмкость i-ого накопителя, и канала обслуживания заявок, ki.



Рис. 3.2. Схема прибора СМО

На каждый элемент прибора обслуживания Пi поступают потоки событий: в накопитель Hi поток заявок wi , на канал ki - поток обслуживания ui.

Потоком событий (ПС) называется последовательность событий, происходящих одно за другим в какие-то случайные моменты времени. Различают потоки однородных и неоднородных событий. Однородный ПС характеризуется только моментами поступления этих событий (вызывающими моментами) и задаётся последовательностью {tn}={0t1t2…tn…}, где tn - момент поступления n- ого события - неотрицательное вещественное число. ОПС может быть также задан в виде последовательности промежутков времени между n-ым и n-1-ым событиями {n}.

Неоднородным ПС называется последовательность {tn, fn} , где tn- вызывающие моменты; fn- набор признаков события. Например, может быть задана принадлежность к тому или иному источнику заявок, наличие приоритета, возможность обслуживания тем или иным типом канала и т.п.

Рассмотрим ОПС, для которого i{n}- случайные величины, независимые между собой. Тогда ПС называется потоком с ограниченным последействием.

ПС называется ординарным, если вероятность того, что на малый интервал времени t, примыкающий к моменту времени t попадает больше одного события Р1(t, t) пренебрежительно мала.

Если для любого интервала t событие P0(t, t) + P1(t, t) + Р1(t, t)=1, P1(t, t) - вероятность попадания на интервал t ровно одного события. Как сумма вероятностей событий, образующих полную группу и несовместных, то для ординарного потока событий P0(t, t) + P1(t, t) 1, Р1(t, t)=(t), где (t)- величина, порядок малости который выше, чем t, т.е. lim((t))=0 при t0.

Стационарным ПС называется поток, для которого вероятность появления того или иного числа событий на интервале времени зависит от длины этого участка и не зависит от того, где на оси времени 0 - t взят этот участок. Для ОПС справедливо 0\*P0(t, t) + 1\*P1(t, t)= P1(t, t) - среднее число событий на интервале t. Среднее число событий, наступающих на участке t в единицу времени составляет P1(t, t)/t. Рассмотрим предел этого выражения при t0

lim P1(t, t)/t=(t)\*(1/един.вр.).

Если этот предел существует, то он называется интенсивностью (плотностью) ОПС. Для стандартного ПС (t)==const.

Применительно к элементарному каналу обслуживания ki можно считать что поток заявок wiW, т.е. интервалы времени между моментами появления заявок на входе ki образуют подмножество неуправляемых переменных, а поток обслуживания uiU, т.е. интервалы времени между началом и окончанием обслуживания заявки образуют подмножество управляемых переменных.

Заявки, обслуженные каналом ki и заявки, покинувшие прибор Пi по различным причинам не обслуженными, образуют выходной поток yiY.

Процесс функционирования прибора обслуживания Пi можно представить как процесс изменения состояний его элементов во времени Zi(t). Переход в новое состояние для Пi означает изменение кол-ва заявок, которые в нём находятся (в канале ki и накопителе Hi). Т.о. вектор состояний для Пi имеет вид : , где - состояния накопителя, (=0 - накопитель пуст, =1- в накопителе одна заявка…, =- накопитель занят полностью; - состояние канала ki (=0 - канал свободен, =1 канал занят).

Q-схемы реальных объектов образуются композицией многих элементарных приборов обслуживания Пi. Если ki различных приборов обслуживания соединены параллельно, то имеет место многоканальное обслуживание (многоканальная Q-схема), а если приборы Пi и их параллельные композиции соединены последовательно, то имеет место многофазное обслуживание (многофазная Q-схема).

Т.о. для задания Q-схемы необходимо оператор сопряжения R, отражающий взаимосвязь элементов структуры.

Связи в Q-схеме изображают в виде стрелок (линий потока, отражающих направление движения заявок). Различают разомкнутые и замкнутые Q-схемы. В разомкнутой выходной поток не может снова поступить на какой-либо элемент, т.е. обратная связь отсутствует.

Собственными (внутренними) параметрами Q-схемы будут являться кол-во фаз LФ, количество каналов в каждой фазе, Lkj, j=1… LФ, количество накопителей каждой фазы Lkj, k=1… LФ, ёмкость i-ого накопителя LiH. Следует отметить, что в теории массового обслуживания в зависимости от ёмкости накопителя применяют следующую терминологию:

1. системы с потерями (LiH=0, накопитель отсутствует);
2. системы с ожиданием (LiH);
3. системы с ограниченной ёмкостью накопителя Нi (смешанные).

Обозначим всю совокупность собственных параметров Q-схемы как подмножество Н.

Для задания Q-схемы также необходимо описать алгоритмы её функционирования, которые определяют правила поведения заявок в различных неоднозначных ситуациях.

В зависимости от места возникновения таких ситуаций различают алгоритмы (дисциплины) ожидания заявок в накопителе Нi и обслуживания заявок каналом ki. Неоднородность потока заявок учитывается с помощью введения класса приоритетов.

В зависимости от динамики приоритетов Q-схемы различают статические и динамические. Статические приоритеты назначаются заранее и не зависят от состояний Q-схемы, т.е. они являются фиксированными в пределах решения конкретной задачи моделирования. Динамические приоритеты возникают при моделировании. Исходя из правил выбора заявок из накопитель Нi на обслуживание каналом ki можно выделить относительные и абсолютные приоритеты. Относительный приоритет означает, что заявка с более высоким приоритетом, поступившая в накопитель Н, ожидает окончания обслуживания представляющей заявки каналом ki и только после этого занимает канал. Абсолютный приоритет означает, что заявка с более высоким приоритетом, поступившая в накопитель, прерывает обслуживание каналом ki заявки с более низким приоритетом и сами занимает канал (при этом вытесненная из ki заявка может либо покинуть систему, либо может быть снова записана на какое-то место в Нi).

Необходимо также знать набор правил, по которым заявки покидают Нi и ki: для Нi – либо правила переполнения, либо правила ухода, связанные с истечением времени ожидания заявки в Нi­; для ki – правила выбора маршрутов или направлений ухода. Кроме того, для заявок необходимо задать правила, по которым они остаются в канале ki, т.е. правила блокировок канала. При этом различают блокировки ki по выходу и по входу. Такие блокировки отражают наличие управляющих связей в Q‑схеме, регулирующих поток заявок в зависимости от состояний Q‑схемы. Набор возможных алгоритмов поведения заявок в Q‑схеме можно представить в виде некоторого оператора алгоритмов поведения заявок **А.**

Т.о. Q‑схема, описывающая процесс функционирования СМО любой сложности однозначно задаётся в виде набора множеств: Q = <W, U, H, Z, R, A> .

# Имитационное моделирование систем.

## Процедура имитационного моделирования.

Определение метода имитационного моделирования. Метод ИМ заключается в создании логико-аналитической (математической модели системы и внешних воздействий), имитации функционирования системы, т.е. в определении временных изменений состояния системы под влиянием внешних воздействий и в поучении выборок значений выходных параметров, по которым определяются их основные вероятностные характеристики. Данное определение справедливо для стохастических систем.

При исследовании детерминированных систем отпадает необходимость изучения выборок значений выходных параметров.

Модель системы со структурным принципом управления представляет собой совокупность моделей элементов и их функциональные взаимосвязи. Модель элемента (агрегата, обслуживающего прибора) - это, в первую очередь, набор правил (алгоритмов) поведения устройства по отношению к выходным воздействиям (заявкам) и правил изменений состояний элемента. Элемент отображает функциональное устройство на том или ином уровне детализации. В простейшем случае устройство может находится в работоспособном состоянии или в состоянии отказа. В работоспособном состоянии устройство может быть занято, например, выполнение операции по обслуживанию заявки или быть свободным. К правилам поведения устройства относятся правила выборки заявок из очереди; реакция устройства на поступление заявки, когда устройство занято или к нему имеется очередь заявок; реакция устройства на возникновение отказа в процессе обслуживания заявки и некоторые другие.

Имитационное моделирование (ИМ) — это метод исследования, который основан на том, что анализируемая динамическая система заменяется имитатором и с ним производятся эксперименты для получения об изучаемой системе. Роль имитатора зачастую выполняет программа ЭВМ.

Основная идея метода ИМ состоит в следующем. Пусть необходимо определить функцию распределения случайной величины **y**. Допустим, что искомая величина **y** может быть представлена в виде зависимости: **y=f(** где случайные величины с известными функциями распределения.

Для решения задач такого вида применяется следующий алгоритм:

1. по каждой из величин производится случайное испытание, в результате каждого определяется некоторое конкретное значение случайной величины **iii**;
2. используя найденные величины, определяется одно частное значение **y­­­­i** по выше приведённой зависимости;
3. предыдущие операции повторяются N раз, в результате чего определяется N значений случайной величины **y**;
4. на основании N значений величины находится её эмпирическая функция распределения.

## Имитация функционирования системы.

Предположим, исследуется вычислительная система (ВС), состоящая из процессора 1 с основной памятью, устройство вода перфокарт 4, АЦПУ 2 и дисплея 3 (рис. 4.1.).



Рис. 4.1. Упрощённая схема моделируемой системы.

Через устройство 4 поступает поток заданий Х1. Процессор обрабатывает задания и результаты выдаёт на АЦПУ 2. Одновременно с этим ВС используется, например, как информационно-справочная система. Оператор-пользователь, работающий за дисплеем, посылает в систему запросы Х2, которые обрабатываются процессором и ответы выводятся на экран дисплея. Процессор работает в 2-х программном режиме: в одном разделе обрабатываются задания Х1, в другом, с более высоким относительным приоритетом запросы Х2. Представим данную ВС в упрощённом варианте в виде стохастической сети из 4-х СМО. Потоки заданий и запросы будем называть потоками заявок. Считаем потоки Х1 и Х2 независимыми. Известны ф.р. периодов следования заявок 1 и 2 и длительность обслуживания Т1К , T2К заявок в к-ом устройстве. Требуется определить времена загрузки каждого устройства и времена реакции по каждому из потоков.

Вначале определяется момент поступления в систему 1-ой заявки потока Х1 по результатам случайного испытания в соответствии с ф.р. периода следования заявок.



Рис. 4.2. Временная диаграмма функционирования ВС.

На рис. 2 это момент времени t1=0+11 (здесь и далее верхний индекс обозначает порядковый номер заявки данного потока). То же самое делается для потока Х2. На рис.2 момент поступления 1-ой заявки потока Х2 t2=0+21. Затем находится минимальное время, т.е. наиболее раннее событие. В примере это время t1. Для 1-ой заявки потока Х1определяется время обслуживания устройством ввода перфокарт Т114 методом случайного испытания и отмечается момент окончания обслуживания t4=t1+ Т114. На рис. показан переход устройства 4 в состояние "занято". Одновременно определяется момент поступления следующей заявки потока Х1: t12=t1+12. Следующее минимальное время это момент поступления заявки потока Х2 - t2. Для этой заявки находится время обслуживания на дисплее Т123 и отслеживается время окончания обслуживания t3=t2+ Т123 . Определяется момент поступления второй заявки потока Х2: t7=t2+22 . Снова выбирается минимальное время — это t3. В этот момент заявка потока Х2 начинает обрабатываться процессором. По результату случайного испытания определяется время её обслуживания T121 и отмечается момент t5=t3+ T121 окончания обслуживания. Следующее минимальное время t4 - момент завершения обслуживания заявки потока Х1 устройством 4. С этого момента заявка может начать обрабатываться процессором, но он занят обслуживанием потока Х2. Тогда заявка потока Х1 переходит в состояние ожидания, становиться в очередь. В следующий момент времени t5 освобождается процессор. С этого момента процессор начинает обрабатывать заявку потока Х1, а заявка потока Х2 переходит на обслуживание дисплеем, т.е. ответ на запрос пользователя передаётся из основной памяти в буферный накопитель дисплея. Далее определяются соответствующие времена обслуживания: T111 и T123 и отмечаются моменты времени t9=t5+ T111 и t6=t5+ T123. В момент t6 полностью завершается обработка первой заявки потока Х2. По разности времени t6 и t2 вычисляется время реакции по этой заявке u12= t6- t2. Следующий минимальный момент t7 - это наступление 2-ой заявки потока Х2. Определяет время поступления очередной заявки этого потока t15= t7+23. Затем вычисляется время обслуживания 2-ой заявки на дисплее T223 и отмечается момент t8=t7+ T223, после чего заявка становится в очередь, т.к. процессор занят. Эта заявка поступит на обслуживание в процессор только после его освобождения в момент t9 . В этот момент заявка потока Х1 начинает обслуживаться в АЦПУ. Определяются времена обслуживания Т221 и Т112 по результатам случайных испытаний и отмечаются моменты окончания обслуживания t11= t9+Т223 и t10= t9+Т112. В момент времени t10 завершается полное обслуживание 1-ой заявки потока Х1. Разность между этим моментом и моментом времени t1 даёт 1-ое значение времени реакции по потоку Х1 u11= t10- t1.

Указанные процедуры выполняются до истечения времени моделирования. В результате получается некоторое количество (выборка) случайных значений времени реакции (u1) и (u2) по 1-ому и 2-ому потокам. По этим значениям могут быть определены эмпирические функции распределения и вычислены количественные вероятностные характеристики времени реакции. В процессе моделирования можно суммировать продолжительности занятости каждого устройства обслуживанием всех потоков. Например, на рис. 2 занятость процессора 1 выделена заштрихованными ступеньками. Если результаты суммирования разделить на время моделирования, то получатся коэффициенты загрузки устройств.

Можно определить время ожидания заявок в очереди, обслуженных системой, среднюю и максимальную длину очереди заявок к каждому устройству, требуемая ёмкость памяти и др.

Имитация даёт возможность учесть надёжностные характеристики ВС. В частности, если известны времена наработки на отказ и восстановления всех входящих в систему устройств, то определяются моменты возникновения отказов устройств в период моделирования и моменты восстановления. Если устройство отказало, то возможны решения:

1. снятие заявки без возврата;
2. помещение заявки в очередь и дообслуживание после восстановления;
3. поступление на повторное обслуживание из очереди;

# Обобщённые алгоритмы имитационного моделирования.

## Алгоритм моделирования по принципу особых состояний.

Оно использовалось в приведённом выше примере. В качестве событий выделены:

1. поступление заявки в систему;
2. освобождение элемента после обслуживания заявки;
3. завершения моделирования;



1. возникновение отказа устройств другие типы
2. завершение восстановления устройств событий

Процесс имитации развивался с использованием управляющих последовательностей, определяемых по функциям распределения вероятностей исходных данных путём проведения случайных испытаний. В качестве управляющих последовательностей использовались в примере последовательности значений периодов следования заявок по каждому i-ому потоку {i} и длительности обслуживания заявок i-ого потока устройством {Tik}. Моменты наступления будущих событий определялись по простым рекуррентным соотношениям. Эта особенность даёт возможность построить простой циклический алгоритм моделирования, который сводится к следующим действиям:

1. определяется событие с минимальным временем — наиболее раннее событие;
2. модельному времени присваивается значение времени наступления наиболее раннего события;
3. определяется тип события;
4. в зависимости от типа события предпринимаются действия, направленные на загрузку устройств и продвижение заявок в соответствии с алгоритмом их обработки, и вычисляются моменты наступления будущих событий; эти действия называют реакцией модели на события;
5. перечисленные действия повторяются до истечения времени моделирования.

В процессе моделирования производится измерение и статистическая обработка значений выходных характеристик. Обобщённая схема алгоритма моделирования по принципу особых состояний приведена на рисунке 5.1.



Рис. 5.1. Обобщённый алгоритм моделирования систем по принципу особых состояний

## Алгоритм моделирования по принципу t.

Укрупнённая схема моделирующего алгоритма, который реализует принцип постоянного приращения модельного времени (принципа t), представлен на следующем рисунке:



Рис. 5.2. Обобщённый алгоритм моделирования систем по принципу приращений "t"

В начале инициализируется программа, в частности вводятся значения Zi(t­0), i=1,2,…k. Которые характеризуют состояние системы в k-мерном фазовом пространстве состояний в начальный момент времени t0. Модельное время устанавливается t = t0= 0. Основные операции по имитации системы осуществляется в цикле. Функционирование системы отслеживается по последовательной схеме состояний Zi(t­). Для этого модельному даётся некоторое приращение dt. Затем по вектору текущих состояний определяются новые состояния Zi(t + dt), которые становятся текущими. Для определения новых состояний по текущим в формализованном описании системы должны существовать необходимые математические зависимости. По ходу имитации измеряются, вычисляются, фиксируются необходимые выходные характеристики. При моделировании стохастических систем вместо новых состояний вычисляются распределения вероятностей для возможных состояний. Конкретные значения вектора текущих состояний определяются по результатам случайных испытаний. В результате проведения имитационного эксперимента получается одна из возможных реализаций случайного многомерного процесса в заданном интервале времени (t0 , Tk).

Моделирующий алгоритм, основанный на применении dt применим для более широкого круга систем, чем алгоритм, построенный по принципу особых состояний. Однако при его реализации возникают проблемы определения величины dt. Для моделирования ВС на системном уровне в основном используются принцип особых состояний.

# Методы определения характеристик моделируемых систем.

## Измеряемые характеристики моделируемых систем.

При имитационном моделировании можно измерять значения любых характеристик, интересующих исследователя. Обычно по результатам вычислений определяются характеристики всей системы, каждого потока и устройства.

Для всей системы производится подсчёт поступивших в систему заявок, полностью обслуженных и покинувших систему заявок без обслуживания по тем или иным причинам. Соотношения этих величин характеризует производительность системы при определённой рабочей нагрузке.

По каждому потоку заявок могут вычисляться времена реакций и ожидания, количества обслуженных и потерянных заявок. По каждому устройству определяется время загрузки при обслуживании одной заявки м число обслуженным устройством заявок, время простоя устройства в результате отказов и количество отказов, возникших в процессе моделирования, дины очередей и занимаемые ёмкости памяти.

При статистическом моделировании большая часть характеристик — это случайные величины. По каждой такой характеристике **y** определяется N значений, по которым строится гистограмма относительных частот, вычисляется математическое ожидание, дисперсия и моменты более высокого порядка, определяются средние по времени и максимальные значения. Коэффициенты загрузки устройств вычисляются по формуле:

**k=Vk\*Nok/Tm**  (1)

Vk- среднее время обслуживания одной заявки к-ым устройством;

Nok**-** количество обслуженных заявок устройством за время моделирования Tm.

Определение условий удовлетворения стохастических ограничений при имитационном моделировании производится путём простого подсчёта количества измерений, вышедших и не вышедших за допустимые пределы.

## Расчёт математического ожидания и дисперсии выходной характеристики.

В случае стационарного эргодического процесса функционирования системы вычисление М(у) и Д(у) выходной характеристики **у** производится усреднением не по времени, а по множеству Nзнач., измеренных по одной реализации достаточной длительности. В целях экономия ОЗУ ЭВМ М(у) и Д(у) вычисляются по рекуррентным формулам:

mn=mn-1\*(n-1)/n + y/n; (2)

где mn-1 - математическое ожидание, вычисленное на предыдущем шаге.

dn=dn-1\*(n-2)/(n-1) + 1/n\*(yn-mn-1)2 (3)

здесь dn-1 - дисперсия, вычисленная на предыдущем шаге.

При большом количестве измерений эти оценки являются состоятельными и несмещёнными.

## Расчёт среднего по времени значения выходной характеристики.

Например, средняя длина очереди к каждому устройству вычисляется по формуле:

 (4)

где i - номер очередного изменения состояния очереди (занесение заявки в очередь или исключение из очереди); N - количество изменений состояния очереди; - интервал времени между двумя последними изменениями очереди.

Ёмкость накопитель:  (5)

где - ёмкость накопителя, занятая в интервале между двумя последними обращениями к накопителю для ввода-вывода заявки.

## Построение гистограммы для стационарной системы.

Г - эмпирическая плотность распределения вероятностей. Задаются границы изменения интересующей характеристики. уi[yн;ув], числом интервалов Ng. Определяется ширина интервала =( yн -­ ув)/Ng.

Затем в процессе моделирования по мере появления значений уi определяется число попаданий этой случайной величины в каждый из интервалов Ri гистограммы. По этим данным вычисляется относительная частота по каждому интервалу: Gi=Ri/(N\*), где N - общее число измерений **у**. Площадь гистограммы равна единице, равна сумме площадей:

, т.к. 

При необходимости выдвигается гипотеза о том, что эмпирическое распределение согласуется с некоторым теоретическим распределением. Эта гипотеза проверяется по тому или иному критерию. Например, при использовании критерия **2** в качестве меры расхождения используется выражение  (6);

где -  определяется из выбранного теоретического распределения вероятность попадания случайной величины в i-ый интервал.

 (7).

Из теоремы Пирсона следует, что для любой функции распределения F(y) случайной величины **у** при N распределения величины **2** имеет вид:

, где z - значение случайной величины **2** ,

k=Ng-(r +1) - число степеней свободы распределения **2** . r - количество параметров теоретического распределения, Г(к/2) - гамма функция.

Функция распределения **2** табулирована. По вычисленному значению **2** и числу степеней свободы с помощью таблиц определяется вероятность Р(**2**<Z). Если она превышает заданный уровень значимости С, то выдвинутая гипотеза принимается.

|  |  |
| --- | --- |
| ДИСКРЕТНО-СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ (Р-схемы) | |
|  | При дискретно-стохастическом подходе к формализации процесса функционирования системы S подход остается аналогичный рассмотренному конечному автомату, то влияние фактора стохастичности можно проследить разновидности таких автоматов, а именно на вероятностных (стохастических) автоматах.  В общем виде *вероятностный автомат* (англ. probabilistic automat) можно определить как дискретный потактный преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит только от состояния памяти в нем и может быть описано статистически.  Применение схем вероятностных автоматов (Р - схем) имеет важное значение для разработки методов проектирования дискретных систем, проявляющих статистически закономерное случайное поведение, для выяснения алгоритмических возможностей таких систем и обоснования границ целесообразности их использования, а также для решения задач синтеза по выбранному критерию дискретных стохастических систем, удовлетворяющих заданным ограничениям.  множество G, элементами которого являются всевозможные пары , где хi и zs —-элементы входного подмножества X и подмножества состояний Z соответственно. Если существуют две такие функции j и y, то с их помощью осуществляются отображения  и , то говорят, что  определяет автомат детерминированного типа.  Введем в рассмотрение более общую математическую схему. Пусть Ф — множество всевозможных пар вида , где yj — элемент выходного подмножества Y. Потребуем, чтобы любой элемент множества G индуцировал на множестве Ф некоторый закон распределения следующего вида:      При этом , где bkj — вероятности перехода автомата в состояние zk и появления на выходе сигнала yj если он был в состоянии zs и на его вход в этот момент времени поступил сигнал xi. Число таких распределений, представленных в виде таблиц, равно числу элементов множества G. Обозначим множество этих таблиц через В. Тогда четверка элементов  называется вероятностным автоматом (Р - автоматом).  Пусть элементы множества G индуцируют некоторые законы распределения на подмножествах Y и Z, что можно представить соответственно в виде:    При этом  и  где zk и qk — вероятности перехода Р-автомата в состояние zk и появления выходного сигнала уk при условии, что Р-автомат находился в состоянии zs и на его вход поступил входной сигнал хi.  Если для всех k и j имеет место соотношение , то такой Р-автомат называется *вероятностным автоматом Мили*. Это требование означает выполнение условия независимости распределений для нового состояния Р-автомата и его выходного сигнала.  определение выходного сигнала Р-автомата зависит лишь от того состояния, в котором находится автомат в данном такте работы. Другими словами, пусть каждый элемент выходного подмножества Y индуцирует распределение вероятностей выходов, имеющее следующий вид:    Здесь , где si — вероятность появления выходного сигнала yi при условии, что Р-автомат находился в состоянии zk.  для всех k и i имеет место соотношение , то такой Р-автомат называется вероятностным автоматом Мура.  Понятие Р-автоматов Мили и Мура введено по аналогии с детерминированным F-автоматом, задаваемым . Частным случаем Р-автомата, задаваемого как  являются автоматы, у которых либо переход в новое состояние, либо выходной сигнал определяются детерминированно. Если выходной сигнал Р-автомата определяется детерминированно, то такой автомат называется Y-детерминированным вероятностным автоматом. Аналогично, Z-детерминированным вероятностным автоматом называется Р-автомат, у которого выбор нового состояния является детерминированным.  Y-детерминированный Р-автомат задаётся таблицей переходов и таблицей выходов. Первую из этих таблиц можно представить в виде квадратной матрицы размерности К´К, которую будем называть матрицей переходных вероятностей или просто матрицей переходов Р-автомата. В общем случае такая матрица переходов имеет вид    Для описания Y-детерминированного Р-автомата необходимо задать начальное распределение вероятностей вида    Здесь dk — вероятность того, что в начале работы Р-автомат находится в состоянии k. При этом .  Y-детерминированный Р-автомат можно задать в виде ориентированного графа, вершины которого сопоставляются состояниям автомата, а дуги — возможным переходам из одного состояния в другое. Дуги имеют веса, соответствующие вероятностям перехода рij, а около вершин графа пишутся значения выходных сигналов, индуцируемых этими состояниями рис 1.    рис 1.  Р-автоматы могут использоваться как генераторы марковских последовательностей, которые необходимы при построении и реализации процессов функционирования систем S или воздействий внешней среды Е.  Для оценки различных характеристик исследуемых систем, представляемых в виде Р-схем, кроме случая аналитических моделей можно применять и имитационные модели, реализуемые, например, методом статистического моделирования. |  |

|  |  |
| --- | --- |
| Сетевые модели (N-схемы) | |
|  | В практике моделирования объектов часто приходится решать задачи, связанные с формализованным описанием и анализом причинно-следственных связей в сложных системах, где одновременно параллельно протекает несколько процессов. Самым распространенным в настоящее время формализмом, описывающим структуру и взаимодействие параллельных систем и процессов, являются сети Петри (англ. Petri Nets), предложенные К. Петри.  Теория сетей Петри развивается в нескольких направлениях:  1.   разработка математических основ,  2.   структурная теория сетей,  3.   различные приложения (параллельное программирование, дискретные динамические системы и т. д.).  Формально сеть Петри (N-схема) задается четверкой вида  ,  где В — конечное множество символов, называемых позициями ,  D — конечное множество символов, называемых переходами, , ;  I — входная функция (прямая функция инцидентности) ;  О — выходная функция (обратная функция инцидентности), .  Таким образом, входная функция I отображает переход dj в множество входных позиций , а выходная функция О отображает переход dj в множество выходных позиций . Для каждого перехода  можно определить множество входных позиций перехода I(dj) и выходных позиций перехода О(dj) как      Аналогично, для каждого перехода  вводятся определения множества входных переходов позиции I(bi) и множества выходных переходов позиции O(bi):  .  Графически N-схема изображается в виде двудольного ориентированного мультиграфа, представляющего собой совокупность позиций и переходов   (рис. 1).    Рис. 1. Графическое изображение N-схемы  Как видно из этого рисунка, граф N-схемы имеет два типа узлов: позиции и переходы, изображаемые 0 и 1 соответственно. Ориентировочные дуги соединяют позиции и переходы, причем каждая дуга направлена от элемента одного множества (позиции или перехода) к элементу другого множества (переходу или позиции). Граф N-схемы является мультиграфом, так как он допускает существование кратных дуг от одной вершины к другой.  Приведенное представление N-схемы может использоваться только для отражения статики моделируемой системы (взаимосвязи событий и условий), но не позволяет отразить в модели динамику функционирования моделируемой системы. Для представления динамических свойств объекта вводится функция маркировки (разметки) .  Маркировка М есть присвоение неких абстрактных объектов, называемых метками (фишками), позициям N-схемы, причем количество меток, соответствующее каждой позиции, может меняться. При графическом задании N-схемы разметка отображается помещением внутри вершин-позиций соответствующего числа точек (когда количество точек велико, ставят цифры).  Маркированная (размеченная) N-схема может быть описана в виде пятерки  и является совокупностью сети Петри и маркировки М.  Функционирование N-схемы отражается путем перехода от разметки к разметке. Начальная разметка обозначается как . Смена разметок происходит в результате срабатывания одного из переходов  сети. Необходимым условием срабатывания перехода dj является , где , - разметка позиции bi. Переход dj для которого выполняется указанное условие, определяется как находящийся в состоянии готовности к срабатыванию или как возбужденный переход.  Срабатывание перехода изменяет разметку сети М(b) = (М(b1), М(b2), ..., M(bn))2 на разметку М¢(b) по следующему правилу:  M'(b) = M(b)-I(dj) + O(dj)  т. е. переход dj изымает по одной метке из каждой своей входной позиции и добавляет по одной метке в каждую из выходных позиций.      Рис. 2. Пример функционирования размеченной N-схемы  Важной особенностью моделей процесса функционирования систем с использованием типовых N-схем является простота построения иерархических конструкций модели. С одной стороны, каждая N-схема может рассматриваться как макропереход или макропозиция модели более высокого уровня. С другой стороны, переход, или позиция N-схемы, может детализироваться в форме отдельной подсети для более углубленного исследования процессов в моделируемой системе S.  Типовые N-схемы на основе обычных размеченных сетей Петри пригодны для описания в моделируемой системе S событий произвольной длительности. В этом случае модель, построенная с использованием таких N-схем, отражает только порядок наступления событий в исследуемой системе S. Для отражения временных параметров процесса функционирования моделируемой системы S на базе N-схем используется расширение аппарата сетей Петри: временные сети, E-сети. |  |

# Обобщенные модели (А-схемы)

## Основные соотношения

Обобщенный подход базируется на понятии  **агрегативной системы** (от англ,  aggregate system), представляющей собой формальную схему общего вида, которую будем называть **А-схемой**. Этот подход позволяет описывать поведение непрерывных и дискретных, детерминированных и стохастических систем.

Комплексное решение проблем, возникающих в процессе создания и машинной реализации модели, возможно лишь в случае, если моделирующие системы имеют в своей основе единую формальную математическую схему, т. е.  А-схему.  **А-схема должна  выполнять несколько функций:**

* являться адекватным математическим описанием объекта моделирования;
* позволять в упрощенном варианте (для частных случаев) проводить аналитические исследования.

Представленные требования несколько противоречивы, но в рамках обобщенного подхода на основе  А-схем удается найти между ними компромисс.

При агрегативном подходе  первоначально дается формальное определение объекта моделирования – агрегативной системы. При агрегативном описании сложный объект (система) разбивается на конечное число частей (подсистем), сохраняя при этом связи, обеспечивающие их взаимодействие.  В случае сложной организации полученных подсистем, подсистемы декомпозируются до уровней в которых они могут быть удобно математически описаны. В результате сложная система представляется в виде многоуровневой конструкции из взаимосвязанных элементов, объединенных в подсистемы различных уровней.

Элементом А-схемы является **агрегат**. Связь между  агрегатами (внутри системы *S* и с внешней средой *E*) осуществляется с помощью оператора сопряжения R. Агрегат может рассматриваться как А-схема, т. е. может разбиваться на элементы (агрегаты) следующего уровня.

Характеристиками агрегата являются:

* множества моментов времени *T*
* входных сигналов *X*
* выходных сигналов *Y*,
* состояний *Z* в каждый момент времени *t*.

Пусть  переход агрегата из состояния *z*(*t*1) в состояние *z*(*t*2)≠*z*(*t*1) происходит за малый интервал времени, т.е. имеет место скачок *δz*. Переходы из состояния *z*(*t*1) в *z*(*t*2) определяются внутренними параметрами агрегата *h*(*t*)∈*H* входными сигналами *x*(*t*)∈*X*.

В начальный момент времени *t*0 состояния *z* имеют значения, равные *z*0, т. е. *z*0=*z*(*t*0), которые задаются законом распределения *L*[*z*(*t*0)].

Пусть изменение состояния агрегата при  входном сигнале *xn* описывается случайным оператором *V*. Тогда в момент поступления в агрегат *tn*∈*T* входного сигнала *xn*состояние определяется*z*(*tn*+0)=*V*[*tn*,*z*(*tn*),*xn*].

Если на интервале времени (*tn*,*tn*+1) нет поступления сигналов, то для *t*∈(*tn*,*tn*+1) состояние агрегата определяется случайным оператором *U* в соответствии с соотношением *z*(*t*)=*U*[*t*,*tn*,*z*(*tn*+0).

Совокупность случайных операторов *V* и *U* рассматривается как оператор переходов агрегата в новые состояния. При этом процесс функционирования агрегата состоит из скачков состояний *δz* в моменты поступления входных сигналов *x* (оператор *V*) и изменений состояний между этими моментами *tn* и  *tn*+1 (оператор *U*). На оператор *U* не накладывается никаких ограничений, поэтому допустимы скачки состояний *δz* в моменты времени, не являющиеся моментами поступления входных сигналов *x*. В дальнейшем моменты скачков *δz* будем называть особыми моментами времени *tδ*, а состояния *z*(*tδ*) – особыми состояниями А-схемы.

Для описания скачков состояний *δz* в особые моменты времени *tδ* используется случайный оператор *W*, который представляет собой частный случай оператора *U*, т.е.*z*(*tδ*+0)=*W*[*tδ*,*z*(*tδ*)].

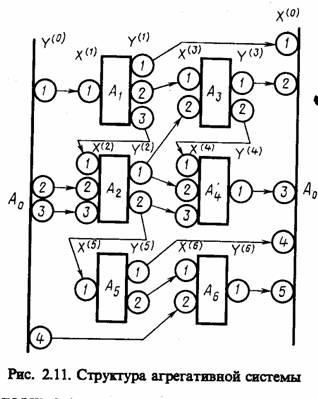
В множестве состояний *Z* выделяется такое подмножество *Z*(*Y*), что если  *z*(*tδ*) достигает $ Z^{(Y)} $, то это состояние является моментом  выдачи выходного сигнала. Выходной сигнал можно описать оператором выходов $ G $

$ y = G[t\_{\delta}, z(t\_{\delta}) $.

**Агрегатом**будем понимать любой объект,  который описывается следующим образом$ A = <T, X, Y, Z, Z^{(Y)}, H, V, U, W, G> $.

## Структура агрегативной системы

**Рассмотрим *А-схему,*структура которой приведена на рис.1**

[](https://vignette.wikia.nocookie.net/itmodeling/images/b/b7/Image005.jpg/revision/latest?cb=20130109181410&path-prefix=ru)

**Структура агрегативной системы**

Функционирование *А-схемы*связано с переработкой информации, передача послед­ней на схеме показана стрелками. Вся информация, циркулирующая в А-схеме*,*делится на внешнюю и внутреннюю. Внешняя информация поступает от внешних объектов, внутренняя инфор­мация вырабатывается агрегатами самой *А-схемы.*Обмен информацией между *А-схемой*и внешней средой *Е*происходит через агрегаты, называющиеся **полюсами А-схемы*.*** Различают входные полюсы на которые поступают x*-*сообщения (агрегаты At*,* *А2, Аб),*и выход­ные полюсы *А-схемы,*выходная информация которых является *у-*сообщениями (агрегаты *А1'****,'****А3, А4, А5, А6).*Агрегаты, не являющиеся полюсами, называются **внутренними***.*

Каждому агрегату *А-схемы Ап*подводятся входные контакты (In) с элементарными входными сигналами xi(t), i = 1..In, и выходные контакты (Jn) с сигналами yj(t), j = 1...Jn.

**Введем ряд предположений:**

1. взаимодей­ствие между *А-схемой*и вне­шней средой *Е,*а также меж­ду отдельными агрегатами внутри системы *S*осуществ­ляется при передаче сигна­лов;
2. для опи­сания сигнала достаточно некоторого конечного набо­ра характеристик;
3. элементарные сигналы мгновенно передаются в *А-схеме*независимо друг от друга по элементарным каналам;
4. к входному контакту любого элемента *А-схемы*подключается не более чем один элементарный канал, к выходному контакту — любое конечное число элементар­ных каналов при условии, что ко входу одного и того же элемента А-схемы направляется не более чем один из упомянутых элементар­ных каналов.

Взаимодействие А-схемы с внешней средой Е рассматривается как обмен сигналами между внешней средой Е и элементами А-схемы, поэтому внешняя среда является фиктивным элементом системы А0, вход которого содержит I0 входных контактов  $ X\_i^{(0)},i=\overline{{1,I\_0}} $ и выход — J0 выходных контактов  $ Y\_j^{(0)},j=\overline{{1,J\_0}} $

Таким образом, каждый агрегат *Ап*  можноохарактеризовать множеством входных кон­тактов *X1(n), Х2(n)*..., *XIn****(****n****)****=* {Xi(n)},

и множеством выходных контактов *Y1*(n), *Y2(n)*..., *У*J(n) = {*У*j(n)}, где $ n=\overline{0,N\_A} $

Пара множеств {X i(n)}, {*У*j(n)} представляют математическую модель агрегата*,*которая описывает сопряжения его с прочими элементами *А-схемы*и внешней средой *Е.*

В силу предположения о независимости передачи сигналов каж­дому входному контакту

* $ X\_i^{(n)}\in\ \bigcup\_{n=0}^{N\_A}\left \{X\_i^{(n)} \right \} $

соответствует не более чем один выходной контакт

* $ Y\_l^{k}\in\ \bigcup\_{n=0}^{N\_A}\left \{Y\_j^{(n)} \right \} $

где

* $ \bigcup\_{n=0}^{N\_A}\left \{X\_i^{(n)} \right \} $ – множество входных контактов всех элементов  А-схемы и внешней среды  Е
* $ \bigcup\_{n=0}^{N\_A}\left \{Y\_j^{(n)} \right \} $ – множество выходных контактов всех элементов  А-схемы и внешней среды  Е, с которыми она связана элементарным каналом;
* $ k,n=\overline{0,N\_A} $

Введем оператор сопряжения *R*: оператор $ Y\_i^{k}=R(X\_i^{(n)}) $ с областью определения в множестве $ \bigcup\_{n=0}^{N\_A}\left \{X\_i^{(n)} \right \} $ и областью значений в множестве $ \bigcup\_{n=0}^{N\_A}\left \{Y\_j^{(n)} \right \} $, сопоставляющий входному контакту $ X\_i^n $ выходной контакт $ Y\_i^k $, связанный с ним элементарным каналом.

Совокупность множеств $ \left \{X\_i^{(n)}\right \},\left \{ Y\_j^{(n)}\right \} $ и оператор R представляют схему сопряжения элементов в систему.

Оператор сопряжения *R*можно**з**адать в виде таблицы, в которой на пересечении строкс номерами элементов(агрегатов) *п*и столбцов с номерами контактов*i* рас­полагаются пары чисел *k, l*, указывающие номер элемента *k*и номер контакта *l*, с которым соединен контакт *Хi(n)*. (таблица)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *п* | *i* | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 1.1 | 3.1 | 4.1 | 5.1 | 6.1 |
| 1 | 0.1 |  |  |  |  |
| 2 | 1.3 | 0.2 | 0.3 |  |  |
| 3 | 1.2 | 2.1 |  |  |  |
| 4 | 3.2 | 2.1 | 2.2 |  |  |
| 5 | 2.2 |  |  |  |  |
| 6 | 5.2 | 0.4 |  |  |  |

Если столбцы и строки такой таблицы пронумеровать парами *n*,*i*и*k****,****l*соответственно и на пересечении поме­щать 1 для контактов *n*,*i*и*k, l*, соединенных элементарным каналом и 0 в противном случае, то получим матрицу смежности ориен­тированного графа, вершинами которого являются контакты аг­регатов, а дугами — элементарные каналы *А-схемы.*

В более сложных случаях могут быть использованы многоуровневые иерархические схемы сопряже­ния. Схема сопряжения агрегата, определяемая оператором *R****,***мо­жет быть использована для описания весьма широкого класса объектов.

**Упорядоченную совокупность конечного числа агрегатов  An, агрегата  А0 и оператора  R можно представить  А-схемой при следующих условиях:**

1. каждый элементарный канал, передающий сигналы во внешнюю среду должен начинается в одном из выходных каналов первого агрегата А-схемы; каждый элементарный канал, передающий сигналы из внешней среды должен заканчиваться на одном из выходных каналов А-схемы;
2. сигналы в А-схеме передаются непосредственно от одного агрегата к другому без устройств, которые способны отсеивать сигналы, по каким-либо признакам;
3. согласование функционирования агрегатов А-схемы во времени;
4. сигналы между агрегатами предаются мгновенно, без искажений и перекодирования, изменяющего структуру сигнала.